UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 1303

Programme 7
Calcul Scientifique,
Logiciels Numériques et Ingénierie Assistée
par Ordinateur

QUATERNIONS : UNE REPRESENTATION PARAMETRIQUE SYSTEMATIQUE DES ROTATIONS FINIES

Luis REYES-AVILA

Octobre 1990

RR.1303

QUATERNIONS : UNE REPRESENTATION PARAMETRIQUE SYSTEMATIQUE DES ROTATIONS FINIES

Partie 1 : Le Cadre Théorique

Luis REYES - AVILA *
INRIA, Rocquencourt
et
DEPFI, UNAM, Seccion Mecanica, Mexique

RESUME :

Les quaternions ont été utilisés ces dernières années, entre autres choses, pour représenter sous forme paramétrique les rotations finies de corps rigides ou déformables. Cependant dans ces applications on ne trouve pas de définition précise et appropriée de ces concepts. Par ailleurs l'algèbre utilisée dans ces développements est appropriée pour les applications mais elle fait généralement peu de place aux concepts et aux propriétés des quaternions. Le principal objectif de ce rapport est de préciser cette structure algébrique et, grâce à elle, de simplifier l'utilisation des quaternions afin d'obtenir les différentes représentations utilisées en mécanique pour exprimer les rotations finies.

QUATERNIONS : A PARAMETRIC SYSTEMATIC REPRESENTATION OF FINITE ROTATIONS

Part 1 : The Theoretical Framework

ABSTRACT :

The Quaternions have been used in the last years, among other things, to perform in a parametric form the rotations of rigid and deformable bodies. Nevertheless in these applications a precise and appropriate definition of these concepts is not given. Furthermore the algebra used in the developments is appropriated to simulate the manipulations but it is not to study the concepts and the properties. The principal objective of this report is to specify the algebraic structure mentioned above and then simplify the use of the quaternions to obtain the different representations used in the mechanics to perform the finite rotations.

---

* Professeur invité dans le Projet Modulef du 15 Octobre 1989 au 30 Octobre 1990

1 - INTRODUCTION

Pour l'étude de la mécanique des corps rigides ou déformables, l'objectif de ce rapport est de systématiser l'utilisation des quaternions dans la représentation paramétrique des rotations finies . Dans la première partie de ce rapport on présente dans l'ensemble $\Re^4$ une structure algébrique qui nous permet d'identifier l'ensemble des quaternions Q comme un groupe additif commutatif et un comme un groupe multiplicatif non commutatif. Nous montrerons également que Q est un espace vectoriel normé.

Dans la seconde partie de ce rapport, nous définirons une transformation linéaire : $\rho\,(p,\bullet) : Q \rightarrow Q$, $p \in Q$ fixé, qui préserve le produit interne et dont la représentation matricielle nous permet de l'identifier avec un groupe de Lie de transformations orthogonales propres qui représente, en mécanique, les rotations finies des milieux continus. Nous donnerons quelques représentations paramétriques de telles rotations.

Dans la troisième partie, nous énoncerons quelques résultats concernant la composition des rotations ainsi que quelques représentations de $\rho(p,\bullet) \in L(Q,Q)$ qui nous permettront d'obtenir par la suite quelques représentations usuelles des rotations.

Dans la quatrième partie, nous introduirons sous forme paramétrique les valeurs caractéristiques associées à une matrice de rotation. Dans la cinquième partie, nous donnerons quelques représentations matricielles que l'on rencontre de façon classique dans l'application des quaternions à la mécanique. Celles-ci sont obtenues de manière directe à partir de notre généralisation.

Finalement, pour étudier les solutions du problème inverse de la cinématique des corps rigides, nous sommes conduits à exprimer le quaternion associé à une rotation à l'aide de l'axe de la rotation et de son angle. Ceci nous permet d'exhiber quelques unes des représentations des rotations les plus connues et les plus utiles dans les applications au moyen de fonctions trigonométriques. Comme cas particulier, nous obtiendrons les rotations infinitésimales.

Notation : Les notations suivantes seront utilisées dans ce travail :

a) Etant donné $V = \Re^n$, $n = 1,2,3,4$.

$L(V,V) \equiv \{\underset{\sim}{T} : V \rightarrow V : \underset{\sim}{T}$ est linéaire $\}$ = Espace vectoriel des tenseurs d'ordre 2.

$S(V,V) \equiv \{\underset{\sim}{S} \in L(V,V) : \underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{S}^T\} \equiv$ espace vectoriel des tenseurs symétriques d'ordre 2.

$A(V,V) \equiv \{\underset{\sim}{A} \in L(V,V) : \underset{\sim}{A} = - \underset{\sim}{A}^T\} \equiv$ espace vectoriel des tenseurs antisymétriques d'ordre 2.

b) $M_{n \times m} = \{M : \Re^m \rightarrow \Re^n$: M est une matrice réelle d'ordre $n \times m\}$.

PLAN :

2 - L'ESPACE VECTORIEL DES QUATERNIONS

Dans cette partie, nous définirons deux opérations binaires sur l'ensemble $\Re^4$, l'une additive $\oplus : \Re^4 \times \Re^4 \rightarrow \Re^4$ et l'autre multiplicative $* : \Re^4 \times \Re^4 \rightarrow \Re^4$ aux moyens desquelles les ensembles $(\Re^4,\oplus)$ et $(\Re^4,*)$ forment respectivement un groupe additif commutatif et un groupe multiplicatif non commutatif. Nous définirons également une multiplication scalaire $\bullet : \Re \times Q \rightarrow Q$ et un produit interne $< \bullet,\bullet > : Q \times Q \rightarrow \Re$ au moyen desquels $Q = (\Re^4,\oplus,*,< \bullet,\bullet >)$ est un espace vectoriel muni d'un produit interne. Finalement, nous identifierons cette structure algébrique avec l'algèbre formelle utilisée sur l'ensemble dont les éléments sont appelés des quaternions commutants. Alors nous considérons l'ensemble $\Re^4$ sur lequel nous définissons les opérations suivantes :

$$\text{i) } (a,b,c,d) \oplus (\alpha,\beta,\gamma,\delta) = (a+\alpha,\ b+\beta,\ c+\gamma,\ d+\delta)$$

$$\begin{aligned}\text{ii) } (a,b,c,d)*(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \ & (a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta,\ a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma, \\ & a\gamma - b\delta + c\alpha + d\beta,\ a\delta + b\gamma - c\beta + d\alpha), \\ & \qquad \forall (a,\ b,\ c,\ d),\ (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta) \in \Re^4.\end{aligned} \tag{2.1}$$

De fait l'opération $\oplus : \Re^4 \times \Re^4 \rightarrow \Re^4$ est la somme usuelle dans $\Re^4$ et il est bien connu que l'ensemble $(\Re^4,\oplus)$ est un groupe additif commutatif. Nous montrons que ces opérations satisfont les résultats suivants :

Théorème 2.1 : Le triplet $Q \equiv (\Re^4,\oplus,*)$ est un corps non commutatif.

Démonstration : Etant donné que $(\Re^4,\oplus)$ est un groupe additif commutatif, il reste uniquement à montrer que $(\Re^4,*)$ est un groupe multiplicatif non commutatif. De fait, nous avons les propriétés suivantes :

i) L'opération $* : \Re^4 \times \Re^4 \rightarrow \Re^4$ est associative. En effet, étant donné $p,q,s \in Q$ telle que $p = (a,b,c,d)$, $q = (\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, $s = (x,y,z,w)$, alors en utilisant les propriétés d'associativité et de distributivité des nombres réels, nous obtenons :

$$\begin{aligned} p*(q*s) = \ & ((a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta)x - (a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma)y - (a\gamma - b\delta + c\alpha + d\beta)z - \\ & \quad - (a\delta + b\gamma - c\beta + d\alpha)w, \\ & (a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma)x + (a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta)y - (a\delta + b\gamma - c\beta + d\alpha)z + \\ & \quad + (a\gamma - b\delta + c\alpha + d\beta)w, \\ & (a\gamma - b\delta + c\alpha + d\beta)x + (a\delta + b\gamma - c\beta + d\alpha)y + (a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta)z - \\ & \quad - (a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma)w, \\ & (a\delta + b\gamma - c\beta + d\alpha)x - (a\gamma - b\delta + c\alpha + d\beta)y + (a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma)z + \\ & \quad + (a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta)w\ ) = (p*q)*s. \end{aligned} \tag{2.2}$$

ii) L'élément $\underset{\sim}{1} = (1,0,0,0) \in Q$ est tel que : $\underset{\sim}{1}*p = p*\underset{\sim}{1} = p$, $\forall p \in Q$. Un tel élément est appelé l'élément neutre pour la multiplication dans Q.

iii) $\forall p \in Q$, $p \neq (0,0,0,0)$, il existe $p' \in Q$, tel que $p*p' = 1$. L'élément p' est appelé l'inverse de p pour la loi multiplicative. En effet étant donné $p = (a,b,c,d) \in Q$ et $p' = (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in Q$ tel que $p*p' = \underset{\sim}{1}$, alors :

$$\begin{aligned} &a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta = 1, && a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma = 0, \\ &a\gamma - b\delta + c\alpha + d\beta = 0, && a\delta + b\gamma - c\beta + d\alpha = 0. \end{aligned}$$

En résolvant ce système d'équation, nous vérifions que l'élément inverse p' de $p \in Q$ est donné par :

$$p' = \left(\frac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2} , \frac{-b}{a^2+b^2+c^2+d^2} , \frac{-c}{a^2+b^2+c^2+d^2} , \frac{-d}{a^2+b^2+c^2+d^2} \right) . \tag{2.3}$$

iv) L'opération $* : \Re^4 \times \Re^4 \rightarrow \Re^4$ n'est pas commutative. En effet étant donné $p = (0,1,0,0) \in Q$ et $q = (0,0,1,0) \in Q$, nous obtenons : $p*q = - q*p = (0,0,0,1)$.

v) Etant donnés $p,q,s \in H$, alors les propriétés suivantes de distributivité sont satisfaites :

$$\begin{aligned} &(p \oplus q)*s = p*s \oplus q*s, \\ &p*(q \oplus s) = p*q \oplus p*s. \end{aligned}$$

En effet, étant donnés $p = (a,b,c,d) \in Q$, $q = (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in Q$, $s = (x,y,z,w) \in Q$, alors en utilisant les propriétés de distributivité et d'associativité des nombres réels nous obtenons :

$$(p \oplus q)*s = (ax - by - cz - dw,\ ay + bx + cw - dz,\ az - bw + cx + dy,$$
$$aw + bz - cy + dx) \oplus (\alpha x - \beta y - \gamma z - \delta w,\ \alpha y + \beta x + \gamma w - \delta z,$$
$$\alpha z - \beta w + \gamma x + \delta y,\ \alpha w + \beta z - \gamma y + \delta x) = p*s \oplus q*s,$$

$$p*(q \oplus s) = (a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta,\ a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma,\ a\gamma - b\delta + c\alpha + d\beta,$$
$$a\delta + b\gamma - c\beta + d\alpha) \oplus (ax - by - cz - dw,\ ay + bx + cw - dz,$$
$$az - bw + cx + dy,\ aw + bz - cy + dx) = p*q \oplus p*s.$$

Avec les propriétés (i) - (v), nous avons ainsi montré notre théorème.

□

Il est également bien connu que l'opération $\bullet : \Re^4 \times \Re^4 \to \Re^4$ définie $\forall \alpha \in \Re$, par

$$\alpha \bullet (a,b,c,d) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d),\ \forall (a,b,c,d) \in \Re^4, \tag{2.4}$$

est une multiplication scalaire et par conséquent Q est un espace vectoriel réel.Considèrons les sous-espaces vectoriels suivants de Q :

$$Q_R = \{(a,0,0,0) : a \in \Re\} \subset Q, \tag{2.5}$$

$$Q_V = \{(0,b,c,d) : b,c,d \in \Re\} \subset Q, \tag{2.6}$$

lesquels sont isomorphes à $\Re$ et $\Re^3$ respectivement. Il est immédiat de montrer que les transformations $T_R : Q_R \to \Re$, $T_V : Q_V \to \Re^3$ définies par

$$T_R(a,0,0,0) = a,\ \forall (a,0,0,0) \in Q_R \tag{2.7}$$

$$T_V\ (0,b,c,d) = (b,c,d)\ ,\ \forall (0,b,c,d) \in Q_V \tag{2.8}$$

sont des isomorphismes.

Avec l'opération scalaire définie antérieurement l'inverse multiplicatif de $p = (a,b,c,d) \in Q$, peut être écrit sous la forme :

$$p' = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2} \bullet (a, -b, -c, -d)\ . \tag{2.9}$$

Egalement tout élément $p \in Q$ peut être représenté sous la forme :

$$p = p_R \oplus p_V, \quad p_R \in Q_R, \quad p_V \in Q_V. \tag{2.10}$$

En accord avec les isomorphismes $T_R : Q_R \to \Re$, $T_V : Q_V \to \Re^3$, on peut dire que p_R et p_V sont respectivement la partie réelle et la partie vectorielle de $p \in Q$ et que la représentation suivante à un sens

$$p \doteq a + \underline{p}, \quad a \in \Re, \quad \underline{p} = (b,c,d) \in \Re^3. \tag{2.11}$$

Avec cette identification, nous exprimerons formellement le produit de deux éléments de $\Re^4$ en fonction de la multiplication scalaire et du produit vectoriel usuel dans $\Re^3$. Nous énonçons ce résultat dans le théorème suivant.

Théorème 2.2 : Etant donnés $p = (a,b,c,d) \in Q$ et $q = (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in Q$, alors $s = p*q \in Q$ peut être représenté sous la forme :

$$s \doteq s_R + s_V,$$
(2.12)

ou

$$s_R = a\alpha - < \underline{p},\underline{q} >, \quad s_V = a\underline{q} + \alpha\underline{p} + \underline{p} \times \underline{q}, \tag{2.13}$$

Ici $< \bullet,\bullet > : \Re^3 \times \Re^3 \to \Re$, $\times : \Re^3 \times \Re^3 \to \Re^3$ sont respectivement le produit interne euclidien et le produit vectoriel usuel dans $\Re^3$.

Démonstration : observons qu'à partir de (2.1) la partie réelle et vectorielle de $s = p*q \in Q$, sont données par :

$$s_R = (a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta, 0,0,0) = (a\alpha - \underline{p}\bullet\underline{q},0,0,0) \doteq a\alpha - < \underline{p},\underline{q} >,$$

$$S_V = (0, a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma, a\gamma - b\delta + c\alpha + d\beta, a\delta + b\gamma - c\beta + d\alpha) \doteq$$
$$(a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma, a\gamma - b\delta + c\alpha + d\beta, a\delta + b\gamma - c\beta + d\alpha) \in \Re^3.$$

Ici nous avons utilisé les isomorphismes $T_R : Q_R \to \Re$, $T_V : Q_V \to \Re^3$. Nous montrons finalement que la partie vectorielle de $s \in Q$ peut être représentée sous la forme :

$$s_V = a\underline{q} + \alpha\underline{p} + \underline{p} \times \underline{q}.$$

En effet,

$$\underline{p} \times \underline{q} = (c\delta - d\gamma, d\beta - b\delta, b\gamma - c\beta) \in \Re^3,$$

de telle sorte que,

$$a\underline{q} + \alpha\underline{p} + \underline{p} \times \underline{q} = (a\beta + \alpha b + c\delta - d\gamma, a\gamma + \alpha c + d\beta - b\delta, a\delta + \alpha d + b\gamma - c\beta) = s_V .$$

$\square$

L'ensemble $\Re^4$ et la structure algébrique formelle du théorème (2.2) a été utilisée en mécanique pour utiliser les rotations finies de corps rigides ou déformables [1], [2], [3] et [6]. Aux éléments d'un tel ensemble on a donné le nom de Quaternion. En fait, grâce aux isomorphismes donnés par les relations (2.7) (2.8) et avec la structure algébrique (2.1), le triplet $Q = (\Re^4, \oplus, *)$, a une structure d'espace vectoriel appelé espace vectoriel des quaternions. Un autre nom a été donné aux quaternions c'est celui de nombres hyper-complexes, [8], ce qui peut être justifié si l'on observe que la structure algébrique définie par la relation (2.1) est une généralisation à $\Re^4$ de l'algèbre des nombres complexes. Suivant cette idée, il est approprié d'introduire le concept suivant : le quaternion conjugué $\overline{p} \in Q$ de $p = (a,b,c,d)$ est définie par :

$$\overline{p} = (a, -b, -c, -d) .$$

Ce concept nous permet de montrer quelques propriétés utiles pour les développements ultérieurs.

Théorème 2.3 : Etant donnés $p = (p_0,p_1,p_2,p_3) \in Q$, $q = (q_0,q_1,q_2,q_3) \in Q$, nous avons :

i) $\overline{(p \oplus q)} = \overline{p} \oplus \overline{q}$,

ii) $\overline{p*q} = \overline{q}*\overline{p}$,

iii) $p*\overline{p} = \overline{p}*p \in Q_R$.

Démonstration : Observons tout d'abord qu'en accord avec la définition de l'opération d'addition sur Q et avec celle du quaternion conjugué on obtient :

$$\overline{(p \oplus q)} = (p_0 + q_0, -p_1 - q_1, -p_2 - q_2, -p_3 - q_3) = \overline{p} \oplus \overline{q} .$$

De même,

$$\overline{p*q} = (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3, -p_0q_1 - p_1q_0 - p_2q_3 + p_3q_3,$$
$$-p_0q_2 + p_1q_3 - p_2q_0 - p_3q_1, -p_0q_3 - p_1q_2 + p_2q_1 - p_1q_0) = \overline{q}*\overline{p} .$$

Finalement,

$$p*\bar{p} = (p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, 0,0,0) = \bar{p}*p.$$

$\square$

Il est également bien connu que la transformation $< \bullet,\bullet > : \Re^4 \times \Re^4 \rightarrow \Re$ définie par :

$$< p,q > = p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 \,, \quad \forall p,q \in \Re^4,$$

est un produit interne dans $\Re^4$ de telle sorte que $(Q,\oplus,*,< \bullet,\bullet >)$ est un espace muni d'un produit interne. De plus, étant donnée $\|\bullet\| : \Re^4 \rightarrow \Re$ la norme induite par le produit interne, on peut conclure que $(Q,\oplus,*,\|\bullet\|)$ est un espace normé. Un autre résultat important pour notre algèbre est donné par le théorème suivant.

Théorème 2.4 : La transformation suivant $< \bullet,\bullet > : \Re^4 \times \Re^4 \rightarrow \Re$ peut être représentée sous la forme :

$$< p,q > \doteq 1/2\ (\bar{p}*q \oplus \bar{q}*p)\,, \quad \forall p,q \in Q\,.$$

Démonstration : il suffit d'observer que :

$$\bar{p}*q \oplus \bar{q}*p = 2\ (p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3\ , 0,0,0) \doteq 2 < p,q > .$$

$\square$

Avec ce résultat la norme $\|\bullet\| : Q \rightarrow \Re$ admet la représentation suivante :

$$\|p\| = < p,p >^{1/2} \doteq \{\bar{p}*p\}^{1/2}\,.$$

3 - REPRESENTATION PARAMETRIQUE DES ROTATIONS

L'objectif de cette partie est d'unifier et par conséquent de simplifier les différentes formes utilisées en mécanique pour représenter sous forme paramétrique les rotations finies de milieux continus tant rigides que déformables. Pour ce faire sous une forme similaire à [7], on définit une transformation linéaire $\rho(p,\bullet) : Q \to Q$ qui préserve le produit interne. La matrice associée à une telle transformation dans la base canonique de $\Re^4$ sera donc celle associée aux rotations précédemment mentionnées. Avec ces identifications, nous passerons de la structure algébrique des quaternions à la structure correspondante de l'espace vectoriel de matrice d'ordre 4×4 et par conséquent à celle associée à l'espace des tenseurs L(Q,Q).

Soit $\rho(p,\bullet) : Q \to Q$, $p \in Q$ fixé, défini par :

$$\rho(p,q) = p*q*p^{-1} = \frac{1}{\|p\|^2}\bullet(p*q*\bar{p}), \quad \forall q \in Q. \tag{3.1}$$

Quelques propriétés importantes pour les développements ultérieurs sont rassemblées dans le théorème suivant :

Théorème 3.1 : La transformation $\rho(p,\bullet) : Q \to Q$ est linéaire, orthogonale et $\rho(p,q) \in Q_V$, $\forall q \in Q_V$.

Démonstration : Grâce aux propriétés d'associativité et de distributivité de la structure algébrique de Q, observons que :

$$\rho(p,q \oplus s) = \frac{1}{\|p\|^2}\bullet\{p*((q \oplus s)*\bar{p})\} = \frac{1}{\|p\|^2}\bullet\{p*(q*\bar{p} \oplus s*\bar{p})\} =$$
$$= \frac{1}{\|p\|^2}\bullet\{p*(q*\bar{p}) \oplus p*(s*\bar{p})\} = \rho(p,q) \oplus \rho(p,s), \quad \forall p,q,s \in Q$$

et

$$\rho(p,\alpha\bullet q) = \frac{1}{\|p\|^2}\{p*(\alpha\bullet q)*\bar{p}\} = \frac{\alpha}{\|p\|^2}\cdot\{p*q*\bar{p}\} = \alpha\bullet\rho(p,q), \quad \forall p,q \in Q, \quad \alpha \in \Re.$$

On peut alors affirmer que $\rho(p,\bullet) \in L(Q,Q)$. Prouvons maintenant l'orthogonalité de la transformation :

$$< \rho(p,q),\rho(p,s) > = < q,s >, \quad \forall q,s \in Q.$$

En effet, en accord avec les théorèmes 2.2 et 2.3 ,

$$< \rho(p,q),\rho(p,s) > = \frac{1}{2\|p\|^4}\{\overline{(p*q*\overline{p})}*(p*s*\overline{p}) \oplus \overline{(p*s*\overline{p})}*(p*q*\overline{p})\}$$

$$= \frac{1}{2\|p\|^4}\{((\overline{q*\overline{p}})*\overline{p})*(p*s*\overline{p}) \oplus ((\overline{s*\overline{p}})*\overline{p})*(p*q*\overline{p})\}$$

$$= \frac{1}{2\|p\|^2}\{p*(\overline{q}*s \oplus \overline{s}*q)*\overline{p}\} = < q,s > .$$

Observons finalement que si $Q = (0,q_1,q_2,q_3) \in Q_V$, alors :

$$\rho(p,q) = \frac{1}{\|p\|^2}(0,(p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2)q_1 + 2(p_1p_2 - p_0p_3)q_2 + 2(p_0p_2 + p_1p_3)d,\ 2(p_0p_3 + $$
$$+ p_1p_2)q_1 + (p_0^2 - p_1^2 + p_2^2 - p_3^2)q_2 + 2(p_2p_3 - p_0p_1)q_3, 2(p_1p_3 - p_0p_2)q_1 +$$
$$+ 2(p_0p_1 + p_2p_3)q_2 + (p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 + p_3^2)q_3) \in H_V .$$

$\square$

Par la suite, nous construirons la matrice $M_{\rho(p,\bullet)} \in M_{4\times4}$ associée à la transformation linéaire définie sur (3.1).

Théorème 3.2 : La matrice $M_{\rho(p,\bullet)} \in M_{4\times4}$ associée à $M_{\rho(p,\bullet)} \in L(Q,Q)$ dans la base $B = \{\underline{e}_i\}_{i=1}^4$ est :

$$M_{\rho(p,\bullet)} = \frac{1}{\|p\|^2}\begin{pmatrix} \|p\|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_0^2+p_1^2-p_2^2-p_3^2 & 2(p_1p_2-p_3p_0) & 2(p_0p_2+p_1p_3) \\ 0 & 2(p_0p_3+p_1p_2) & p_0^2-p_1^2+p_2^2-p_3^2 & 2(p_2p_3-p_0p_1) \\ 0 & 2(p_1p_3-p_0p_2) & 2(p_0p_1+p_2p_3) & p_0^2-p_1^2-p_2^2+p_3^2 \end{pmatrix}$$

où $p = (p_0,p_1,p_2,p_3) \in Q$.

Démonstration : Il suffit d'appliquer la transformation $\rho(p,\bullet) \in L(Q,Q)$ aux éléments de B et d'exprimer les images comme combinaison linéaire de la même base B. C'est à dire :

$$\rho(p,\underset{\sim}{e}_1) = \frac{1}{\|p\|^2}\,(p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, 0,0,0) = \underset{\sim}{e}_1 + 0\underset{\sim}{e}_2 + 0\underset{\sim}{e}_3 + 0\underset{\sim}{e}_4 \in Q_R$$

$$\rho(p,\underset{\sim}{e}_2) = \frac{1}{\|p\|^2}\,(0,\, p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2,\, 2(p_0p_3 + p_1p_2),\; 2(p_1p_3 - p_0p_2)) =$$

$$= 0\underset{\sim}{e}_1 + \frac{1}{\|p\|^2}\,[(p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2)\,\underset{\sim}{e}_2 + 2(p_0p_3 + p_1p_2)\,\underset{\sim}{e}_3 +$$

$$+ 2(p_1p_3 - p_0p_2)\,\underset{\sim}{e}_4] \in Q_V\,;$$

$$\rho(p,\underset{\sim}{e}_3) = \frac{1}{\|p\|^2}\,(0,\, 2(p_1p_2 - p_0p_3),\, (p_0^2 - p_1^2 + p_2^2 - p_3^2),\, 2(p_1p_0 + p_3p_2)) =$$

$$= 0\underset{\sim}{e}_1 + \frac{1}{\|p\|^2}\,[2(p_1p_2 - p_0p_3)\,\underset{\sim}{e}_2 + (p_0^2 - p_1^2 + p_2^2 - p_3^2)\,\underset{\sim}{e}_3$$

$$+ 2(p_1p_0 + p_3p_2)\,\underset{\sim}{e}_4] \in Q_V\,;$$

$$\rho(p,\underset{\sim}{e}_4) = \frac{1}{\|p\|^2}\,(0, 2(p_0p_2 + p_1p_3),\, 2(p_2p_3 - p_0p_1),\, (p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 + p_3^2)) =$$

$$= 0\underset{\sim}{e}_1 + \frac{1}{\|p\|^2}\,[2(p_0p_2 + p_1p_3)\,\underset{\sim}{e}_2 + 2(p_2p_3 - p_0p_1)\,\underset{\sim}{e}_3$$

$$+ (p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 + p_3^2)\,\underset{\sim}{e}_4] \in Q_V\,.$$

□

On peut trouver la représentation matricielle du théorème précédent en [7] dans le cas particulier de la restriction de la transformation à Q_V, c'est à dire $\rho(p,\bullet) : Q_V \to Q_V$; en utilisant l'isomorphisme entre Q_V et $\Re^3$, on obtient dans ce repère la matrice d'ordre 3×3 correspondante. Dans notre cas, nous avons construit la matrice de $\rho(p,\bullet) : Q \to Q$ d'ordre 4×4 respectant la structure algébrique de Q. Par ailleurs, étant donnée $B = \{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}_{i,j=1}^{4}$ une base orthonormale de l'espace L(Q,Q), nous obtenons la représentation tensorielle suivante :

$$\rho(p,\bullet) = \frac{1}{\|p\|^2}\,[\,\|p\|^2\,\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_1 + (p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2)\,\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_2 +$$

$$+ 2(p_1p_2 - p_3p_0)\,\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_3 + 2(p_0p_2 + p_1p_3)\,\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_4 +$$

$$+ 2(p_0p_3 + p_1p_2)\,\underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_2 + (p_0^2 + p_2^2 - p_1^2 - p_3^2)\,\underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_3 + \qquad (3.3)$$

$$+ (p_1p_3 - p_0p_1)\,\underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_4 + 2(p_1p_3 - p_0p_2)\,\underset{\sim}{e}_4 \otimes \underset{\sim}{e}_2 +$$

$$+ 2(p_0p_1 + p_2p_3)\,\underset{\sim}{e}_4 \otimes \underset{\sim}{e}_3 + (p_0^2 + p_3^2 - p_1^2 - p_2^2)\,\underset{\sim}{e}_4 \otimes \underset{\sim}{e}_4\,].$$

Ici on utilise la structure algébrique de L(Q,Q). A partir de cette représentation on obtient immédiatement le résultat suivant :

Théorème 3.3 : La transformation $\rho(p,\bullet) \in L(Q,Q)$ peut être représentée sous la forme :

$$\rho(p,\bullet) = \underset{\sim}{I} + \frac{2}{\|p\|^2} [\underset{\sim}{W} \circ \underset{\sim}{W} + p_o \underset{\sim}{W}], \tag{3.4}$$

où $\underset{\sim}{W} \in A(Q,Q)$ est défini par :

$$\underset{\sim}{W} = - p_3 \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_3 + p_2 \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_4 + p_3 \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_2 - p_1 \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_4 - p_2 \underset{\sim}{e}_4 \otimes \underset{\sim}{e}_2 + p_1 \underset{\sim}{e}_4 \otimes \underset{\sim}{e}_3 . \tag{3.5}$$

Démonstration : Pour la démonstration nous faisons appel à la représentation matricielle de $\rho(p,\bullet) \in L(Q,Q)$ où nous observons que les matrices symétrique et antisymétrique de $M_{\rho(p,\cdot)} \in M_{4\times 4}$ sont données respectivement par

$$M^{s}_{\rho(p,\cdot)} = \frac{1}{\|p\|^2} \begin{pmatrix} \|p\|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_0^2+p_1^2-p_2^2-p_3^2 & 2p_1p_2 & 2p_1p_3 \\ 0 & 2p_1p_2 & p_0^2+p_2^2-p_1^2-p_3^2 & 2p_2p_3 \\ 0 & 2p_1p_3 & 2p_2p_3 & p_0^2+p_3^2-p_1^2-p_2^2 \end{pmatrix} .$$

$$M^{A}_{\rho(p,\cdot)} = \frac{2p_0}{\|p\|^2} \; W \equiv \frac{2p_0}{\|p\|^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_3 & p_2 \\ 0 & p_3 & 0 & -p_1 \\ 0 & -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ici $\underset{\sim}{W} = W_{ij} \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j . \in A(Q,Q)$. En outre, étant donné que :

$$p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = \|p\|^2 - 2(p_2^2 + p_3^2), \quad p_0^2 + p_2^2 - p_1^2 - p_3^2 = \|p\|^2 - 2(p_1^2 + p_3^2)$$

$$p_0^2 + p_3^2 - p_1^2 - p_3^2 = \|p\|^2 - 2(p_1^2 + p_2^2) \text{ ,}$$

la partie symétrique peut être écrite de la façon suivante :

$$M^s_{\rho(p,\cdot)} = \underset{\sim}{I} + \frac{2}{\|p\|^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(p_2^2+p_3^2) & p_1p_2 & p_1p_3 \\ 0 & p_1p_2 & -(p_1^2+p_3^2) & p_2p_3 \\ 0 & p_1p_3 & p_2p_3 & -(p_1^2+p_2^2) \end{pmatrix}$$

On observe immédiatement que la matrice du second membre de cette expression est le carré de la matrice $W \in M_{4\times 4}$. Alors on obtient le résultat cherché.

$\square$

Par la suite on exprime la transformation $\rho(p,\cdot) \in L(Q,Q)$ en fonction de la grandeur du quaternion et de sa partie vectorielle.

Théorème 3.4 : La transformation $\rho(p,\cdot) \in L(Q,Q)$ prend la forme suivante :

$$\rho(p,\cdot) = \frac{1}{\|p\|^2}\{(\|p\|^2\underset{\sim}{I} - 2\|\underline{p}_v\|^2\underset{\sim}{I}_0) + 2\underline{p}_v \otimes \underline{p}_v + 2p_0\underset{\sim}{W}\} \text{ ,} \qquad (3.6)$$

où $\underline{p}_v \in \Re^3$ est la partie vectorielle du quaternion $p \in Q$ et la transformation $\underset{\sim}{I}_0 : \Re^4 \to \Re^4$ est définie par :

$$\underset{\sim}{I}_0 = \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_2 + \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_3 + \underset{\sim}{e}_4 \otimes \underset{\sim}{e}_4 \text{ .}$$

Démonstration : Il suffit d'observer que la matrice associée à la partie symétrique de $\rho(p,\cdot) \in L(Q,Q)$ est telle que :

$$
M^s_{\rho(p,\cdot)} = \underset{\sim}{I} + \frac{2}{\|p\|^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1^2 - \|\underset{-}{p}_v\|^2 & p_1 p_2 & p_1 p_3 \\ 0 & p_1 p_2 & p_2^2 - \|\underset{-}{p}_v\|^2 & p_2 p_3 \\ 0 & p_1 p_3 & p_2 p_3 & p_3^2 - \|\underset{-}{p}_v\|^2 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \underset{\sim}{I} + \frac{2}{\|p\|^2} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1^2 & p_1 p_2 & p_1 p_3 \\ 0 & p_1 p_2 & p_2^2 & p_2 p_3 \\ 0 & p_1 p_3 & p_2 p_3 & p_3^2 \end{pmatrix} - \|\underset{-}{p}_v\|^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}
$$

A partir de cette dernière expression, on observe que l'égalité

$$
\underset{\sim}{W} \circ \underset{\sim}{W} = \underset{-}{p}_v \otimes \underset{-}{p}_v - \|\underset{-}{p}_v\|^2 \underset{\sim}{I}_0
$$

(3.8)

est satisfaite car :

$$
(\underset{-}{p}_v \otimes \underset{-}{p}_v)\, \underset{-}{e}_1 = 0 \underset{-}{p}_v = 0 ,
$$

$$
(\underset{-}{p}_v \otimes \underset{-}{p}_v)\, \underset{-}{e}_2 = p_1 \underset{-}{p}_v = (0, p_1^2, p_1 p_2 , p_1 p_3) ,
$$

$$
(\underset{-}{p}_v \otimes \underset{-}{p}_v)\, \underset{-}{e}_3 = p_2 \underset{-}{p}_v = (0, p_1 p_2, p_2^2, p_2 p_3) ,
$$

$$
(\underset{-}{p}_v \otimes \underset{-}{p}_v)\, \underset{-}{e}_4 = p_3 \underset{-}{p}_v = (0, p_1 p_3, p_2 p_3, p_3^2) .
$$

□

Théorème 3.5 : La transformation $\rho(p,\bullet) \in L(Q,Q)$ peut s'exprimer sous la forme :

$$
\rho(p,\bullet) = \underset{\sim}{I}_R + \underset{\sim}{F} \tag{3.9}
$$

où,

$$\underset{\sim}{I}_R = \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_1 \tag{3.10}$$

$$\underset{\sim}{F} = \frac{1}{\|p\|^2}\,[p_0^2\,\underset{\sim}{I}_o + \underset{\sim}{W} \circ \underset{\sim}{W} + \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v + 2p_0\underset{\sim}{W}]. \tag{3.11}$$

Démonstration : En effet, en utilisant le théorème précédent , on obtient :

$$\rho(p,\bullet) = \frac{1}{\|p\|^2}\,[\,(\|p\|^2\,\underset{\sim}{I} - \|\underline{p}_v\|^2\,\underset{\sim}{I}_0) + ((\underline{p}_v \otimes \underline{p}_v) - \|\underline{p}_v\|^2\,\underset{\sim}{I}_0) + \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v + 2p_0\,\underset{\sim}{W}]$$

$$= \frac{1}{\|p\|^2}\,[\,\|p\|^2\,\underset{\sim}{I}_R + (\,\|p\|^2 - \|\underline{p}_v\|^2\,\underset{\sim}{I}_0) + \underset{\sim}{W} \circ \underset{\sim}{W} + 2p_0\,\underset{\sim}{W}] =$$

$$= \underset{\sim}{I}_R + \frac{1}{\|p\|^2}\,[p_0^2\,\underset{\sim}{I}_0 + \underset{\sim}{W} \circ \underset{\sim}{W} + \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v + 2p_0\,\underset{\sim}{W}]\,.$$

□

Notre prochain objectif est de montrer que la transformation $\underset{\sim}{F} \in L(\Re^4,\Re^4)$ définie dans le dernier théorème peut être identifiée au moyen d'un isomorphisme approprié à l'aide d'un élément d'un groupe de Lie de transformations orthogonales propres que nous noterons suivant l'usage [9], par S0(3) c'est à dire :

$$S03 = \{\underset{\sim}{T} \in L(\Re^3,\Re^3) : \underset{\sim}{T} \circ \underset{\sim}{T}^T = \underset{\sim}{T}^T \circ \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}\,,\ \det \underset{\sim}{T} = 1\ \} \tag{3.12}$$

Un tel groupe représente en mécanique des rotations finies de corps rigides voir [9]. A cette fin nous établissons les résultats suivants.

Théorème 3.6 : Les éléments de la matrice $M_{\rho(p,\cdot)} \in M_{4\times 4}$ satisfont les relations suivantes :

$$\begin{pmatrix} M_{23} \\ M_{33} \\ M_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -M_{44} & M_{34} \\ M_{44} & 0 & -M_{24} \\ -M_{34} & M_{24} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{22} \\ M_{32} \\ M_{42} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} M_{24} \\ M_{34} \\ M_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -M_{42} & M_{32} \\ M_{42} & 0 & -M_{22} \\ -M_{32} & M_{22} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{23} \\ M_{33} \\ M_{43} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M_{22} \\ M_{32} \\ M_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -M_{43} & M_{33} \\ M_{43} & 0 & -M_{23} \\ -M_{33} & M_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{24} \\ M_{34} \\ M_{44} \end{pmatrix}$$

Démonstration : Il suffit simplement d'effectuer les multiplications matricielles indiquées de telle sorte que :

$$-M_{44}M_{32} + M_{34}M_{42} = \frac{2}{\|p\|^2}\ (p_1p_2 + p_0p_3) = M_{23}\ ,$$

$$-M_{34}M_{22} + M_{24}M_{32} = \frac{2}{\|p\|^2}\ (p_2p_3 + p_0p_1) = M_{42}\ ,$$

$$M_{44}M_{22} - M_{24}M_{42} = \frac{1}{\|p\|^2}\ [p_0^2 + p_2^2 - p_1^2 - p_3^2] = M_{33}\ .$$

De même,

$$-M_{42}M_{33} + M_{32}M_{43} = \frac{2}{\|p\|^2}\ (p_1p_3 + p_0p_2) = M_{24}\ ,$$

$$M_{42}M_{23} - M_{22}M_{43} = \frac{2}{\|p\|^2}\ (p_2p_3 - p_0p_1) = M_{34}\ ,$$

$$-M_{32}M_{23} + M_{22}M_{33} = \frac{1}{\|p\|^2}\ (p_0^2 + p_3^2 - p_1^2 - p_2^2) = M_{44}\ .$$

Finalement,

$$M_{43}M_{24} - M_{23}M_{44} = \frac{2}{\|p\|^2}\ (p_3p_0 + p_1p_2) = M_{32}\ ,$$

$$-M_{33}M_{24} + M_{23}M_{34} = \frac{2}{\|p\|^2}\ (p_1p_3 - p_0p_2) = M_{42}\ ,$$

$$-M_{43}M_{34} + M_{33}M_{44} = \frac{1}{\|p\|^2}\ (p_1^2 + p_0^2 - p_2^2 - p_3^2) = M22\ .$$

$\square$

Théorème 3.7 : La transformation $\rho(p,\bullet) \in L(Q,Q)$ est telle que :

$$\rho(p,\bullet) \in \{\underset{\sim}{T} \in L(Q,Q) : \underset{\sim}{T} \circ \underset{\sim}{T}^T = \underset{\sim}{T}^T \circ \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}\ ,\ \ \det \underset{\sim}{T} = 1\ \} \tag{3.13}$$

Démonstration : Comme $\rho(p,\bullet) \in L(Q,Q)$ est orthogonal (voir théorème 3.1), il reste à montrer que le déterminant $\rho(p,\bullet) = 1$. En effet, on observe que :

$$M_{\rho(p,.)} = \begin{pmatrix} 1 & \theta^T \\ \theta & A \end{pmatrix}$$

où $A \in M_{3\times3}$, $\theta \in M_{3\times1}$ sont tels que

$$A = \begin{pmatrix} M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix}, \qquad \theta = (0,0,0)^T .$$

Par suite $\det M_{\rho(p,\cdot)} = \det A = \pm 1$, étant donné que $M_{\rho(p,\cdot)}$ est orthogonal. Mais grâce au théorème (3.6),

$$\det A = M_{22}(M_{33}M_{44} - M_{34}M_{43}) - M_{32}(M_{23}M_{44} - M_{24}M_{43}) +$$
$$+ M_{42}(M_{23}M_{34} - M_{24}M_{33}) = M_{22}^2 + M_{32}^2 + M_{42}^2 > 0 ,$$

ce qui établit le résultat cherché.

□

Observons finalement que la matrice de la transformation $\underset{\sim}{F} \in L(Q,Q)$ est donnée avec A $\in M_{3\times3}$ définie comme dans le théorème par :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \theta^T \\ \theta & A \end{pmatrix}, \quad \theta \in M_{3\times1} \tag{3.14}$$

autrement dit $F \in M^0_{4\times4}$ où $M^0_{4\times4}$ est le sous-espace de $M_{4\times4}$ de dimension 3×3, défini par

$$M^0_{4\times4} = \{A \in M_{44} : A_{1j} = 0 , \ j = 1,2,3,4 , \ A_{i1} = 0 , \ i = 1,2,3,4\}.$$

Ce sous-espace est isomorphe à l'espace vectoriel $M_{3\times3}$. En fait la transformation $\hat{T} : M_{4\times4} \to M_{3\times3}$ définie par :

$$\hat{T}B = \begin{pmatrix} B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix} \quad \forall B \in M^0_{4\times 4}, \tag{3.15}$$

est un isomorphisme. Dans ce sens, nous pouvons obtenir l'identification cherchée, c'est à dire :

$$\underset{\sim}{F} \doteq \hat{\underset{\sim}{F}} \in S0(3),$$

où, étant donnée $\{\underset{-}{e}_i\}_{i=1}^{3}$ la base canonique en $\Re^3$,

$$\begin{aligned} \hat{\underset{\sim}{F}} = M_{22}\, \underset{-}{e}_1 \otimes \underset{-}{e}_1 + M_{23}\, \underset{-}{e}_1 \otimes \underset{-}{e}_2 + M_{24}\, \underset{-}{e}_1 \otimes \underset{-}{e}_3 + M_{32}\, \underset{-}{e}_2 \otimes \underset{-}{e}_1 + \\ + M_{33}\, \underset{-}{e}_2 \otimes \underset{-}{e}_2 + M_{34}\, \underset{-}{e}_2 \otimes \underset{-}{e}_3 + M_{42}\, \underset{-}{e}_3 \otimes \underset{-}{e}_1 + \\ + M_{43}\, \underset{-}{e}_3 \otimes \underset{-}{e}_2 + M_{44}\, \underset{-}{e}_3 \otimes \underset{-}{e}_3 \,. \end{aligned} \tag{3.16}$$

4 - COMPOSITION DES ROTATIONS

Nous étudierons dans cette partie quelques propriétés des transformations $\underset{-}{p}_v \otimes \underset{-}{p}_v \in S(Q,Q)$; $\underset{\sim}{W} \in A(Q,Q)$ qui nous permettront d'obtenir d'autres représentations de la rotation $\rho(p,\bullet) \in L(Q,Q)$ ainsi que de leur puissance. Quelques unes de ces représentations sont obtenues sans démonstration précise par exemple en [1], [10], dans les cas particuliers qui sont présentés. Nous commencerons par établir la propriété suivante de $\underset{-}{p}_v \otimes \underset{-}{p}_v \in S(Q,Q)$ relative à sa composition.

Théorème 4.1 : La transformation $\underset{-}{p}_v \otimes \underset{-}{p}_v \in S(Q,Q)$ est telle que :

$$(\underset{-}{p}_v \otimes \underset{-}{p}_v)^n = \|\underset{-}{p}_v\|^n\, \underset{-}{p}_v \otimes \underset{-}{p}_v \,, \quad n = 2,3, \ldots \tag{4.1}$$

Démonstration : On procède par récurrence . Tout d'abord, nous montrons que le résultat est valable pour n = 2. En effet la matrice associée à $(\underset{-}{p}_v \otimes \underset{-}{p}_v)^2$ est telle que

$$M_{\underline{p}_v}^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1^2 & p_2p_1 & p_1p_3 \\ 0 & p_1p_2 & p_2^2 & p_3p_2 \\ 0 & p_1p_3 & p_2p_3 & p_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1^2 & p_2p_1 & p_1p_3 \\ 0 & p_1p_2 & p_2^2 & p_3p_2 \\ 0 & p_1p_3 & p_2p_3 & p_3^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1^4+p_1^2p_2^2+p_1^2p_3^2 & p_2p_1^3+p_2^3p_1+p_1p_2p_3^2 & p_1^3p_3+p_2^2p_1p_3+p_1p_3^3 \\ 0 & p_1^3p_2+p_1p_2^3+p_2p_1p_3^2 & p_1^2p_2^2+p_2^4+p_2^2p_3^2 & p_1^2p_2p_3+p_3p_2^3+p_3^3p_2 \\ 0 & p_1^3p_3+p_2^2p_1p_3+p_1p_3^3 & p_1^2p_2p_3+p_2^3p_3+p_2p_3^3 & p_1^2p_3^2+p_2^2p_3^2+p_3^4 \end{pmatrix}$$

$$= ||\underline{p}_v||^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1^2 & p_1p_2 & p_1p_3 \\ 0 & p_1p_2 & p_2^2 & p_2p_3 \\ 0 & p_1p_3 & p_2p_3 & p_3^2 \end{pmatrix}$$

Par suite,

$(\underline{p}_v \otimes \underline{p}_v)^2 = ||\underline{p}_v||^2\, \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v$.

Supposons maintenant que le résultat soit valable pour n-1 ; alors

$(\underline{p}_v \otimes \underline{p}_v)^n = (\underline{p}_v \otimes \underline{p}_v) \circ (\underline{p}_v \otimes \underline{p}_v)^{n-1} = (\underline{p}_v \otimes \underline{p}_v)\{\, ||\underline{p}_v||^{n-1}\, \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v \} =$

$$= ||\underline{p}_v||^{n-1} (\underline{p}_v \otimes \underline{p}_v) \circ (\underline{p}_v \otimes \underline{p}_v) = ||\underline{p}_v||^n\, \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v \,.$$

Dans cette dernière relation on a utilisé la linéarité de $\underline{p}_v \otimes \underline{p}_v$.

□

Avec la relation (3.8) et avec le résultat du théorème 4.1, nous pouvons maintenant obtenir le résultat suivant :

Théorème 4.2 : La transformation antisymétrique $\underset{\sim}{W} \in A(Q,Q)$ est telle que

$$\underset{\sim}{W}^{2n-1} = (-1)^{n-1}||\underline{p}_v||^{2n-2}\,\underset{\sim}{W}\,, \qquad \underset{\sim}{W}^{2n} = (-1)^{n-1}||\underline{p}_v||^{2n-2}\,\underset{\sim}{W}^2, \qquad n = 2, .., \tag{4.2}$$

Démonstration : On procéde à nouveau par récurrence. Observons que

$$\underset{\sim}{W}^3 = \underset{\sim}{W} \text{ o } \underset{\sim}{W}^2 = \underset{\sim}{W} \text{ o } \{\underline{p}_v \otimes \underline{p}_v - ||\underline{p}_v||^2\,\underset{\sim}{I}\} = -\,||\underline{p}_v||^2\,\underset{\sim}{W}\,,$$

de telle sorte que $\underset{\sim}{W} \text{ o } \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v = 0$. En outre , $\underset{\sim}{W}^4 = \underset{\sim}{W} \text{ o } \underset{\sim}{W}^3 = -\,||\underline{p}_v||^2\,\underset{\sim}{W}^2$, de telle sorte que (4.2) est vraie pour n = 2.

Supposons maintenant que (4.2) est encore vraie pour n-1. Alors,

$$\underset{\sim}{W}^{2n-1} = \underset{\sim}{W}^2 \text{ o } \underset{\sim}{W}^{2(n-1)-1} = \underset{\sim}{W}^2 \text{ o } \{(-1)^{n-2}||\underline{p}_v||^{2n-4}\,\underset{\sim}{W}\} = (-1)^{n-2}\,||\underline{p}_v||^{2n-4}\,\underset{\sim}{W}^3 =$$
$$= (-1)^{n-2}\,||\underline{p}_v||^{2n-4}\,\{-\,||\underline{p}_v||^2\,\underset{\sim}{W}\} = (-1)^{n-1}\,||\underline{p}_v||^{2n-2}\,\underset{\sim}{W}\,.$$

Finalement,

$$\underset{\sim}{W}^{2n} = \underset{\sim}{W}^2 \text{ o } \underset{\sim}{W}^{2n-2} = \underset{\sim}{W}^2 \text{ o } \{(-1)^{n-2}\,||\underline{p}_v||^{2n-4}\,\underset{\sim}{W}^2\} = (-1)^{n-2}\,||\underline{p}_v||^{2n-4}\,\underset{\sim}{W}^4 =$$
$$= (-1)^{n-1}\,||\underline{p}_v||^{2n-2}\,\underset{\sim}{W}^2\,.$$

□

Montrons maintenant un résultat important sur la composition de $\rho(p,\bullet) \in L(Q,Q)$.

Théorème 4.3 : La transformation $\rho(p,\bullet) \in L(Q,Q)$ est telle que

$$\rho(p,\bullet)^n = \underset{\sim}{I}_R + \underset{\sim}{F}^n\,, \quad n = 1,2,... \tag{4.3}$$

où,

$$\underset{\sim}{F} = \frac{1}{||\underline{p}||^2}\,[p_0^2\,\underset{\sim}{I}_0 + \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v + \underset{\sim}{W} \circ \underset{\sim}{W} + 2p_0\,\underset{\sim}{W}]\,, \tag{4.4}$$

$$\underset{\sim}{I}_R = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \tag{4.5}$$

Démonstration : Dans le théorème 3.5, on a montré que le résultat est valable pour n = 1. Supposons qu'il soit également vrai pour n-1 et par suite,

$$\begin{aligned}\rho(p,\bullet)^n = \rho(p,\bullet) \circ \{\rho(p,\bullet)\}^{n-1} &= (\underset{\sim}{I}_R + \underset{\sim}{F}) \circ (\underset{\sim}{I}_R + \underset{\sim}{F}^{\,n-1}) \\ &= \underset{\sim}{I}^2{}_R + \underset{\sim}{I}_R \circ \underset{\sim}{F}^{\,n-1} + \underset{\sim}{F} \circ \underset{\sim}{I}_R + \underset{\sim}{F}^{\,n} = \underset{\sim}{I}_R + \underset{\sim}{F}^{\,n},\end{aligned}$$

de telle sorte que, $\underset{\sim}{I}^2{}_R = \underset{\sim}{I}_R$ et

$$\underset{\sim}{I}_R \circ \underset{\sim}{F}^{\,n-1} + \underset{\sim}{F} \circ \underset{\sim}{I}_R = I_R \circ \underset{\sim}{F}^{\,n} = 0.$$

□

Nous allons maintenant établir le résultat important suivant.

Théorème 4.4 : La transformation $\underset{\sim}{F} \in L(Q,Q)$ définie dans le théorème précédent est telle que

$$\underset{\sim}{F} \circ \underset{\sim}{F}^T = \underset{\sim}{F}^T \circ \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{I}_0 \tag{4.6}$$

Démonstration : On obtient par l'application des théorèmes 3.1, 3.5 :

$$\underset{\sim}{I} = \rho(p,\bullet) \circ \rho(p,\bullet)^T = \rho(p,\bullet)^T \circ \rho(p,\bullet) = (\underset{\sim}{I}_R + \underset{\sim}{F} \circ \underset{\sim}{F}^T) = (\underset{\sim}{I}_R + \underset{\sim}{F}^T \circ \underset{\sim}{F})$$

de telle sorte que

$$\underset{\sim}{F} \circ \underset{\sim}{F}^T = I - \underset{\sim}{I}_R = \underset{\sim}{I}_0 = \underset{\sim}{F}^T \circ \underset{\sim}{F}\,.$$

□

Théorème 4.5 : Soit $p \in Q$ tel que $||p|| = \pm\,(p_0 - 2\ell)$, $\ell \in \Re$ alors $\rho(p,\bullet) \in L(Q,Q)$ admet la représentation suivante :

$$\rho(p,\bullet) = \underset{\sim}{I}_R + \underset{\sim}{G} \circ \underset{\sim}{G}\,, \tag{4.7}$$

ou

$$\underset{\sim}{G} = \left(\frac{1}{p_0 - 2\ell}\right)\left[p_0 \underset{\sim}{I}_0 + \frac{1}{2\ell}\, \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v + \underset{\sim}{W}\right]. \tag{4.8}$$

Démonstration : Observons tout d'abord que dans ce cas

$$||p||^2 = p_0^2 + ||\underline{p}_v||^2 = p_0^2 - 4\ell p_0 + 4\ell^2 .$$

Par suite $||\underline{p}_v||^2 = 4\ell(\ell - p_0)$. Ainsi $4\ \ ^2 = ||\underline{p}_v||^2 + 4\ell p_0$. De même à partir du théorème 3.5 nous déduisons

$$\rho(p,\bullet) = \underset{\sim}{I}_R + \frac{1}{||p||^2}\,[p_0^2 \underset{\sim}{I}_0 + \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v + \underset{\sim}{W} \circ \underset{\sim}{W} + 2p_0 \underset{\sim}{W}] \ . \tag{4.9}$$

Observons maintenant que

$$\underline{p}_v \otimes \underline{p}_v = \frac{4\ell^2}{4\,\ell^2}\, \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v = \left(\frac{1}{4\ell^2}\, ||\underline{p}_v||^2 + \frac{p_0}{\ell}\right)\underline{p}_v \otimes \underline{p}_v =$$
$$= \frac{1}{4\,\ell^2}\, (\underline{p}_v \otimes \underline{p}_v)^2 + \frac{p_0}{\ell} + \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v \ .$$

Ici nous avons utilisé le théorème 4.1 avec $n = 2$. Substituant cette expression en (4.9), nous obtenons

$$\rho(p,\bullet) = \underset{\sim}{I}_R + \frac{1}{||p||^2}\left[p_0^2\, \underset{\sim}{I}_0 + \frac{p_0}{\ell}\, \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v + \frac{1}{4\,\ell^2}\, \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v + \underset{\sim}{W} \circ \underset{\sim}{W} + 2p_0 \underset{\sim}{W}\right]$$

Le résultat suit si l'on observe qu'avec la définition (4.8) nous avons

$$\underset{\sim}{G}^2 = \frac{1}{(p_0 - 2\ell)^2}\Big[p_0^2\, \underset{\sim}{I}_0 + \frac{4}{\ell^2}\,(\underline{p}_v \otimes \underline{p}_v)^2 + \frac{1}{\ell}\, p_0\, \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v +$$
$$+ \underset{\sim}{W} \circ \underset{\sim}{W} + 2\, p_0 \underset{\sim}{W} + \frac{1}{2\ell}\,(\underline{p}_v \otimes \underline{p}_v \circ \underset{\sim}{W} + \underset{\sim}{W} \circ \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v)\Big];$$

$$\underset{\sim}{W} + \underset{\sim}{W} \circ \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v = \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v \circ \underset{\sim}{W} - \underset{\sim}{W}^T \circ \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v =$$
$$= \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v \circ \underset{\sim}{W} - \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v \circ \underset{\sim}{W} = 0 \ .$$

Ce qui conduit au résultat cherché.

□

En combinant les théorèmes 3.5 et 4.3 on obtient l'expression

$$\rho(p,\bullet)^n = \underset{\sim}{I}_R + (\underset{\sim}{G} \circ \underset{\sim}{G})^n = \underset{\sim}{I}_R + \underset{\sim}{G}^{2n}, \quad p \in Q, \quad \|p\| = p_0 - 2\ell > 0, \; \ell \in \mathfrak{R}. \qquad (4.10)$$

Grâce au théorème 4.3, il est relativement facile de déterminer la composition de la transformation $\rho(p,\bullet) \in L(Q,Q)$. Par la suite, nous examinons quelques cas particuliers.

Théorème 4.6 : Les expressions suivantes sont satisfaites pour un $\rho(p,\bullet) \in L(Q,Q)$,

$$\rho(p,\bullet)^2 = \underset{\sim}{I}_R + \frac{1}{\|p\|^4} [p_0^4 \underset{\sim}{I}_0 + (2p_0^2 + \|\underline{p}_v\|^2)\, \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v + (6p_0^2 - \|\underline{p}_v\|^2)\, \underset{\sim}{W}^2$$
$$+ 4p_0(p_0^2 - \|\underline{p}_v\|^2)\, \underset{\sim}{W}] ,$$

$$\rho(p,\bullet)^3 = \underset{\sim}{I}_R + \frac{1}{\|p\|^6} [p_0^6 \underset{\sim}{I}_0 + (3p_0^4 + 3p_0^2 \|\underline{p}_v\|^2 + \|\underline{p}_v\|^4)\, \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v +$$
$$+ (15p_0^4 - 15p_0^2 \|\underline{p}_v\|^2 + \|\underline{p}_v\|^4)\, \underset{\sim}{W}^2 +$$
$$+ (6p_0^5 - 20p_0^3 \|\underline{p}_v\|^2 + 6p_0 \|\underline{p}_v\|^4)\, \underset{\sim}{W} + 2p_0 \|\underline{p}\|^2\, \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v \circ \underset{\sim}{W}] ,$$

$$\rho(p,\bullet)^4 = \underset{\sim}{I}_R + \frac{1}{\|p\|^8} [p_0^8 \underset{\sim}{I}_0 + (4p_0^8 + 6p_0^4 \|\underline{p}_v\|^2 + 4p_0^2 \|\underline{p}_v\|^4 + \|\underline{p}_v\|^8)\, \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v +$$
$$+ (28p_0^8 - 70p_0^4 \|\underline{p}_v\|^2 + 28p_0^2 \|\underline{p}_v\|^4 - \|\underline{p}_v\|^8)\, \underset{\sim}{W}^2 +$$
$$+ (8p_0^{10} - 56p_0^5 \|\underline{p}_v\|^2 + 56p_0^3 \|\underline{p}_v\|^4 - 8p_0 \|\underline{p}_v\|^8)\, \underset{\sim}{W}] .$$

Démonstration : On obtient le résultat en utilisant le théorème 4.6 et en observant que

$$\underline{p}_v \otimes \underline{p}_v \circ \underset{\sim}{W} + \underset{\sim}{W} \circ \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v = \underline{p}_v \otimes \underline{p}_v \circ \underset{\sim}{W}^2 = 0 .$$

□

5 - VALEURS CARACTERISTIQUES DES ROTATIONS

Notre objectif dans cette partie est de déterminer les valeurs caractéristiques associées à la transformation $\rho(p,\bullet) \in L(Q,Q)$. Pour cela , observons tout d'abord que si l'on désigne par $\hat{\underset{\sim}{F}} \in SO(3)$ la transformation définie en (3.16), on déduit de l'équation caractéristique

$$\det(M_{\rho(p,\cdot)} - \lambda \underset{\sim}{I}) = \frac{1}{||p||^8}(||p||^2 - \lambda)\det(\hat{\underset{\sim}{F}} - \lambda \underset{\sim}{I}_0) = 0\,, \tag{5.1}$$

que $\lambda = ||p||^2$ est une valeur caractéristique de $\rho(p,\bullet) \in L(Q,Q)$. Les trois autres valeurs caractéristiques sont obtenues à partir de l'équation ; $\det(\hat{\underset{\sim}{F}} - \lambda \underset{\sim}{I}_0) = 0$. La forme explicite de celui-ci est donnée par

$$-\lambda^3 + (\mathrm{tr}\,\hat{\underset{\sim}{F}})\lambda^2 - \frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\,\hat{\underset{\sim}{F}})^2 - \mathrm{tr}\,(\hat{\underset{\sim}{F}}^2)]\,\lambda + 1 = 0\,. \tag{5.2}$$

Ici on a utilisé le fait que $\det \hat{\underset{\sim}{F}} = 1$. Montrons maintenant le résultat suivant.

Théorème 5.1 : La relation suivante est satisfaite par les éléments de $\hat{\underset{\sim}{F}} \in SO(3)$

$$\mathrm{tr}\,\hat{\underset{\sim}{F}} = \frac{1}{2}\,[(\mathrm{tr}\,\hat{\underset{\sim}{F}})^2 - \mathrm{tr}\,(\hat{\underset{\sim}{F}}^2)]\,. \tag{5.3}$$

Démonstration : Observons que

$$(\mathrm{tr}\,\hat{\underset{\sim}{F}})^2 = (M_{22} + M_{33} + M_{44})^2 = M_{22}^2 + M_{33}^2 + M_{44}^2 + 2(M_{22}M_{33} + M_{22}M_{44} + M_{33}M_{44})\,,$$

et

$$(\mathrm{tr}\,\hat{\underset{\sim}{F}})^2 = M_{22}^2 + M_{33}^2 + M_{44}^2 + 2(M_{23}M_{32} + M_{24}M_{42} + M_{34}M_{43})\,.$$

Par suite, en utilisant le théorème 3.6 on conclut que

$$(\mathrm{tr}\,\hat{\underset{\sim}{F}})^2 - (\mathrm{tr}\,\hat{\underset{\sim}{F}}^2) = 2(M_{22}M_{33} + M_{22}M_{44} + M_{33}M_{44} - M_{23}M_{32} - \\ - M_{24}M_{42} - M_{34}M_{43}) = 2\mathrm{tr}\,\hat{\underset{\sim}{F}}\,.$$

□

Avec ce résultat, nous pouvons montrer le théorème suivant.

Théorème 5.2 : Les valeurs caractéristiques de $\hat{\underset{\sim}{F}} \in SO(3)$ sont

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_{2,3} = \frac{1}{||p||^2}((p_0^2 - ||\underset{\sim}{p}_v||^2), \pm 2p_0\,||\underset{\sim}{p}_v||)\,. \tag{5.4}$$

Démonstration : D'après le théorème précédent l'équation caractéristique de $\hat{\underset{\sim}{F}} \in SO(3)$ est donnée par

$$\lambda^3 + (\operatorname{tr} \hat{\underset{\sim}{F}})\lambda^2 - (\operatorname{tr} \hat{\underset{\sim}{F}})\lambda + 1 = 0. \tag{5.5}$$

De cette équation on déduit immédiatement que $\lambda = 1$ est une racine. L'espace caractéristique de cette valeur caractéristique est appelé en mécanique <u>l'axe de la rotation</u> $\hat{\underset{\sim}{F}} \in SO(3)$. Les deux autres valeurs caractéristiques sont obtenues comme solution de l'équation

$$\lambda^2 - (1 - \operatorname{tr} \hat{\underset{\sim}{F}})\lambda + 1 = 0. \tag{5.6}$$

On obtient alors que

$$\lambda = \frac{1}{2} \{(\operatorname{tr} \hat{\underset{\sim}{F}} - 1) \pm \sqrt{(1 - \operatorname{tr} \hat{\underset{\sim}{F}}^2 - 4)}\} .$$

Mais,

$$\operatorname{tr} \hat{\underset{\sim}{F}} - 1 = \frac{1}{||p||^2} (3p_0^2 - ||\underline{p}_v||^2) - 1 = \frac{1}{||p||^2} (3p_0^2 - ||\underline{p}_v||^2 - p_0^2 - ||\underline{p}_v||^2) = \frac{2}{||p||^2} (p_0^2 - ||\underline{p}_v||^2),$$

et par suite,

$$\begin{aligned}(1 - \operatorname{tr} \hat{\underset{\sim}{F}}^2) - 4 &= \frac{4}{||p||^4} [(p_0^2 - ||\underline{p}_v||^2)^2 - (p_0^2 + ||\underline{p}_v||^2)^2] = \\ &= \frac{4}{||p||^4} (p_0^4 - 2p_0^2 ||\underline{p}_v||^2 + ||\underline{p}_v||^4 - p_0^4 - 2p_0^2 ||\underline{p}_v||^2 - ||\underline{p}_v||^4) \\ &= -\frac{16}{||p||^4} p_0^2 ||\underline{p}_v||^2 < 0 , \quad \forall p \neq \theta \in Q .\end{aligned}$$

Ainsi les deux racines restantes sont complexes et données par :

$$\lambda = \frac{1}{||p||^2} ((p_0^2 - ||\underline{p}_v||^2) , \ (\pm)\, 2p_0 ||\underline{p}_v||).$$

$\square$

Grâce aux deux théorèmes précédents on peut conclure que les valeurs caractéristiques de $\rho(p,\bullet) \in L(Q,Q)$ sont données par :

$$\lambda_1 = \|p\|^2 , \lambda_2 = 1, \tag{5.7}$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{\|p\|^2} \left((p_0^2 - \|\underline{p}_v\|^2), \ \pm 2p_0 \|\underline{p}_v\|\right). \tag{5.8}$$

De là nous déduisons que étant donné $p_0 \neq 0$, toutes les valeurs caractéristiques sont distinctes. Lorsque $p_0 = 0$ observons que ce résultat se réduit à

$$\lambda_1 = \|\underline{p}_v\|^2, \quad \lambda_2 = 1 \ , \ \lambda_{3,4} = (-1,0) \doteq - 1 \tag{5.9}$$

Ainsi, $-1 \in \Re$ est une valeur caractéristique de multiplicité 2. Etablissons maintenant le résultat suivant qui nous montre que étant donné $p \in Q$ alors $\underline{p}_v \in Q_v$ est un vecteur caractéristique de valeur caractéristique $1 \in \Re$, de la transformation $\rho(p,\bullet) \in L(Q,Q)$.

Théorème 5.3 : Soit $p \in Q$ alors,

$$\rho(p,\underline{p}_v) = \underline{p}_v \tag{5.10}$$

où $\underline{p}_v \in Q_v$ est la partie vectorielle du quaternion $p \in Q$.

Démonstration : Le résultat est obtenu à partir de la définition de $\rho(p,\bullet) \in L(Q,Q)$ c'est à dire

$$\rho(p,\bullet) = \frac{1}{\|p\|^2} \, p*\underline{p}_v*\bar{p} = \frac{1}{\|p\|^2} \left(0, \|p\|^2 p_1, \|p\|^2 p_2, \|p\|^2 p_3\right) = \underline{p}_v \, .$$

$\square$

6 - AUTRES REPRESENTATIONS MATRICIELLES.

Il est assez habituel de trouver dans la littérature sur les quaternions que leur maniement utilise l'algèbre matriciel [4], [5], [8]. L'objectif de cette partie est de présenter cet algèbre isomorphe à celle présentée dans ce travail. Observons tout d'abord que la transformation $T : Q \to M_{1\times4}$ définie par

$$T\,(p_0, p_1, p_2, p_3) = (p_0, p_1, p_2, p_3)^T, \quad \forall p = (p_0, p_1, p_2, p_3) \in Q \tag{6.1}$$

est un isomorphisme. Par suite à tout $p \in Q$ nous pouvons associer une matrice unique $\underline{p} \in M_{1\times 4}$ au moyen de l'égalité $\underline{p} = Tp$. Montrons maintenant le résultat suivant

Théorème 6.1 : Soit $p = (p_0, p_1, p_2, p_3) \in Q$, $q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \in Q$, alors la matrice $A \in M_{1\times 4}$ associée au quaternion $r = p*q \in Q$ admet les deux représentations suivantes

$$A = P\underline{q} = Q\underline{p}, \tag{6.2}$$

où $P \in M_{4\times 4}$, $Q \in M_{4\times 4}$, $\underline{p} \in M_{1\times 4}$, $\underline{q} \in M_{1\times 4}$ sont définis par :

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

$$\underline{p} = Tp, \quad \underline{q} = Tq. \tag{6.4}$$

Démonstration : Il suffit d'effectuer des multiplications matricielles c'est à dire

$$\begin{aligned} \underline{r} = Tr = P\underline{q} = Q\underline{p} = (&p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3,\ \ p_1q_0 + p_0q_1 - p_3q_2 + p_2q_3, \\ &p_2q_0 + p_3q_1 + p_0q_2 - p_1q_3,\ \ p_3q_0 - p_2q_1 + p_1q_2 + p_0q_3)^T. \end{aligned}$$

$\square$

En accord avec la représentation matricielle du théorème précédent nous observons que les matrices $P \in M_{4\times 4}$, $Q \in M_{4\times 4}$ peuvent s'écrire sous la forme

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & -p_v^T \\ p_v & p_0 I_0 + W_p \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_0 & -q_v^T \\ q_v & q_0 I_0 - W_q \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

où, en utilisant par abus les isomorphismes, $P_v \in M_{1\times 3}$, $Q_v \in M_{1\times 3}$ sont respectivement les matrices associées à la partie vectorielle des quaternions $p,q \in Q$. Egalement $W_p \in M_{3\times 3}$,

$W_q \in M_{3\times3}$, sont les matrices de la partie antisymétrique de $\rho(p,\bullet) \in L(Q,Q)$ et $\rho(q,\bullet) \in L(Q,Q)$. Nous dirons finalement que $I_0 \in M_{3\times3}$ est la matrice identité.

$\square$

D'autres représentations habituelles de la matrice $M_{\rho(p,\cdot)} \in M_{4\times4}$ sont données dans les résultats suivants.

Théorème 6.2 : La matrice $F \in M_{3\times3}$ de $\hat{\underset{\sim}{F}} \in SO(3)$ peut être représentée sous la forme

$$F = \frac{1}{||p||^2}(2p_0^2 - ||p||)\, I_0 + 2(\underline{p}\ \underline{p}^T + p_0 W)\,, \tag{6.6}$$

où $I_0 \in M_{3\times3}$ est la matrice identité $\underline{p} = Tp \in M_{3\times1}$ et $W \in M_{3\times3}$ est la matrice de la partie antisymétrique de la rotation.

Démonstration : A l'aide du théorème 4.3, observons que la transformation $\rho(p,\bullet) \in L(Q,Q)$ est donnée par :

$$\rho(p,\bullet) = \underset{\sim}{I}_R + \frac{1}{||p||^2}((p_0^2 - ||\underline{p}_v||^2)\underset{\sim}{I}_0 + 2(\underline{p}_v \otimes \underline{p}_v) + 2p_0\, \underset{\sim}{W}) =$$
$$\underset{\sim}{I}_R + \frac{1}{||p||^2}((2p_0^2 - ||p||^2)\, \underset{\sim}{I}_0 + 2(\underline{p}_v \otimes \underline{p}_v) + 2p_0\, \underset{\sim}{W})\,.$$

La matrice associée à la transformation $\underline{p}_v \otimes \underline{p}_v \in L(Q,Q)$ est telle que

$$M_{\underline{p}_v \otimes \underline{p}_v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1^2 & p_1p_2 & p_1p_3 \\ 0 & p_2p_1 & p_2^2 & p_2p_3 \\ 0 & p_3p_3 & p_3p_2 & p_3^2 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} p_1^2 & p_1p_2 & p_1p_3 \\ p_2p_1 & p_2^2 & p_2p_3 \\ p_3p_3 & p_3p_2 & p_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} (p_1\, p_2\, p_3) = \underline{p}\ \underline{p}^T\,.$$

En identifiant la matrice de $\underset{\sim}{W} \in A(Q,Q)$ on obtient de manière similaire

$$M_{\underset{\sim}{W}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_3 & p_2 \\ 0 & p_3 & 0 & -p_1 \\ 0 & -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix} \doteq W = \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Au moyen de l'identification $\underset{\sim}{F} \simeq \hat{\underset{\sim}{F}} \in SO(3)$, observons que la matrice F est :

$$F = \frac{1}{||p||^2} (2p_0^2 - ||p||^2) \underset{\sim}{I}_0 + 2(\underset{\sim}{p}\underset{\sim}{p}^T + p_0 W) \in M_{3\times 3}.$$

□

Théorème 6.3 : Les composantes de la matrice $F \in M_{3\times 3}$ satisfont la relation suivante

$$F_{ij} = \frac{1}{||p||^2} [(p_0^2 - p_k p_k)\, \delta_{ij} + 2(p_i p_j - \varepsilon_{ijk}\, p_0 p_k)] . \tag{6.7}$$

Démonstration : La démonstration est obtenue en substituant les indices et en réalisant les sommations indiquées. On peut obtenir plus directement le résultat, en utilisant le théorème précedent et en observant que la relation est satisfaite.

□

Dans le théorème suivant on donne une autre façon de représenter la matrice $F \in M_{3\times 3}$ que l'on trouve assez souvent dans les applications.

Théorème 6.4 : Soit $E \in M_{3\times 4}$, $G \in M_{3\times 4}$ définis par :

$$E = \frac{1}{||p||} [-\underset{-}{p}, p_0 I + W] \equiv \frac{1}{||p||} \begin{pmatrix} -p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ -p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ -p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

$$G = \frac{1}{||p||}\,[-\underline{p},\, p_0 I - W\,] \equiv \frac{1}{||p||}\begin{pmatrix} -p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ -p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ -p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{pmatrix}. \tag{6.9}$$

Alors,

$$F = EG^T. \tag{6.10}$$

Démonstration : On obtient le résultat en effectuant la multiplication matricielle.

□

En accord avec le théorème précédent, nous pouvons observer que $\hat{\underset{\sim}{F}} \in SO(3)$ peut s'exprimer comme la combinaison des transformations $\underset{\sim}{E} \in L(\Re^4,\Re^3)$, $\underset{\sim}{G}^T \in L(\Re^3,\Re^4)$ définies par

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{G}^T = \frac{1}{||p||}\,[&- p_1\, \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_1 - p_2\, \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_2 - p_3\, \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_3 + p_0\, \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_1 - p_3\, \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_2 + \\ &+ p_2\, \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_3 + p_3\, \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_1 + p_0\, \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_2 - p_1\, \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_3 - \\ &- p_2\, \underset{\sim}{e}_4 \otimes \underset{\sim}{e}_1 + p_1\, \underset{\sim}{e}_4 \otimes \underset{\sim}{e}_2 + p_0\, \underset{\sim}{e}_4 \otimes \underset{\sim}{e}_3]\,, \end{aligned} \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{E} = \frac{1}{||p||}\,[&- p_1\, \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_1 + p_0\, \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_2 - p_3\, \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_3 + p_2\, \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_4 - p_2\, \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_1 + \\ &+ p_3\, \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_2 + p_0\, \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_3 - p_1\, \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_4 - p_3\, \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_1 - \\ &- p_2\, \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_2 + p_1\, \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_3 + p_0\, \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_4] \end{aligned} \tag{6.12}$$

C'est à dire,

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{E} \circ \underset{\sim}{G}^T \tag{6.13}$$

7 - LE PROBLEME INVERSE DE LA CINEMATIQUE DES CORPS RIGIDES

Dans les sections antérieures, nous avons montré que les rotations des corps rigides peuvent être représentées sous forme paramétrique par les éléments de l'espace vectoriel des quaternions. Ainsi nous sommes passés d'une structure algébrique de $\Re^4$ à la structure algébrique matricielle c'est à dire à celle correspondant aux tenseurs du second ordre. Dans cette partie nous étudierons le problème inverse de la cinématique des corps rigides qui dans notre contexte peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}&\text{Etant donnés } \theta \in [0, n\pi], \quad n \in \Re, \quad w \in \Re^3, \quad \|w\| = 1 \\ &\text{chercher } p \in Q \text{ tel que } \rho(p,w) = w\end{aligned} \tag{7.1}$$

L'étude d'un tel problème nous permettra de trouver quelques unes des représentations. Ces représentations sont basées sur des fonctions trigonométriques utilisées dans la mécanique pour exprimer la rotation $\hat{\underset{\sim}{F}} \in SO(3)$. Rappelons tout d'abord que si $p \in Q$, sa partie vectorielle est un vecteur caractéristique de $\rho(p,\bullet) \in L(Q,Q)$ de valeur caractéristique unitaire. Egalement l'espace caractéristique Q_ε de valeur caractéristique $\lambda = 1$ se définit par :

$$Q_\varepsilon = \{q \in Q : \ \rho(p,q) = q\} \cup \{0\}, \tag{7.2}$$

et le complément orthogonal de Q_ε, par

$$Q_\varepsilon^\perp = \{p \in Q : \langle p,q \rangle = 0, \quad \forall q \in Q_\varepsilon\}. \tag{7.3}$$

A l'aide de ces idées, nous établirons les résultats suivants qui sont d'importance fondamentale pour nos objectifs.

Théorème 7.1 : Soit $u = (u_0, u_1, u_2, u_3) \in Q_\varepsilon^\perp$, $\|u\| = 1$. Alors,

$$\cos\theta = \frac{\langle u,\rho(p,u)\rangle}{\|u\|^2} = \frac{1}{\|p\|^2}\langle u, p*u*\bar{p}\rangle = \frac{1}{\|p\|^2}\{p_0^2 + \|p\|^2(2u_0^2-1)\}, \tag{7.4}$$

$$\sin\theta = (\pm)\frac{2\|\underline{p}_v\|}{\|p\|}\sqrt{(1-u_0^2)(p_0^2 + u_0^2\,\|\underline{p}_v\|^2)}. \tag{7.5}$$

Démonstration : Compte tenu de la structure algébrique de Q, nous pouvons obtenir de façon directe que :

$$p*u*\bar{p} = (\|p\|^2 u_0,\ (p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2)u_1 + 2(p_1p_2 - p_0p_3)u_2 + 2(p_0p_2 + p_1p_3)u_3\ ,$$

$$2(p_3p_0 + p_1p_2)u_1 + (p_0^2 - p_1^2 + p_2^2 - p_3^2)u_2 + 2(p_3p_2 - p_0p_1)u_3\ ,$$

$$2(p_3p_1 - p_0p_2)u_1 + 2(p_0p_1 + p_2p_3)u_2 + (p_0^2 + p_3^2 - p_1^2 - p_2^2)u_3).$$

Egalement, étant donné que $u \in Q_\varepsilon^\perp$ est unitaire, nous obtenons

$$\cos\theta = \frac{1}{\|p\|^2} < u, p*u*\bar{p} > = \frac{1}{\|p\|^2} \{2u_0^2(\|p\|^2 - p_0^2) + p_0^2 - \|\underline{p}_v\|^2 +$$

$$+ 2(p_1^2u_1^2 + p_2^2u_2^2 + p_3^2u_3^2 + 2u_1u_2p_1p_2 + 2p_1p_3u_1u_3 + 2p_2p_3u_3u_2)\}$$

mais étant donné que $u \in Q_\varepsilon^\perp$, $< u,p > = u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 = 0$ et

$$0 = < u,p >^2 = p_1^2u_1^2 + p_2^2u_2^2 + p_3^2u_3^2 + 2u_1u_2p_1p_2 + 2p_1p_3u_1u_3 + 2p_2p_3u_3u_2\,.$$

Par suite,

$$\cos\theta = \frac{1}{\|p\|^2}\,(2u_0^2\,\|\underline{p}_v\| + p_0^2 - \|\underline{p}_v\|^2) = \frac{1}{\|p\|^2}\,(p_0^2 + \|\underline{p}_v\|^2\,(2u_0^2 - 1))\,.$$

De même, étant donné que $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, nous obtenons :

$$\sin^2\theta = \frac{4\|\underline{p}_v\|^2}{\|p\|^2}\,(1 - u_0^2)\,(p_0^2 + u_0^2\,\|\underline{p}_v\|^2)\,.$$

Ceci démontre la seconde partie du théorème.

□

Théorème 7.2 : Soit $u = (0, u_1, u_2, u_3) \in Q_\varepsilon^\perp$. Alors

$$u \times \rho\,(p,u) = 2p_0\,\frac{\|u\|^2}{\|p\|^2}\,(0, p_1, p_2, p_3) \doteq 2p_0\,\frac{\|u\|^2}{\|p\|^2}\,\underline{p}_v\ . \tag{7.6}$$

Démonstration : Compte tenu de la structure algébrique de Q et du fait que $< u, \underline{p}_v > = 0$, nous obtenons que :

$$\rho(p,u) = -(0, u_1, u_2, u_3) + \frac{1}{||p||^2}(0, 2p_0^2u_1 + 2p_0(p_2u_3 - p_3u_2),$$
$$2p_0^2u_2 + 2p_0(p_3u_1 - p_1u_3), 2p_0^2u_3 + 2p_0(p_1u_2 - p_2u_1)) .$$

En identifiant les quaternions $u, \rho(p,u) \in Q_v$, au moyen de l'isomorphisme intégré $T_v : Q \to \Re^3$, avec $T_vu, T_v\rho(p,u) \in \Re^3$, et en effectuant le produit vectoriel entre ces vecteurs et en utilisant l'orthogonalité de u et $\underline{p}_v$, nous obtenons :

$$u \times \rho(p,u) = T_v \times T_v(\rho(p,u)) = 2p_0\frac{||u||^2}{||p||^2}\underline{p}_v \doteq 2p_0\frac{||u||^2}{||p||^2}(0, p_1, p_2, p_3) .$$

$\square$

Corollaire 7.1 : Soit $u = (0, u_1, u_2, u_3) \in Q_v$. Alors,

$$\cos\theta = \frac{1}{||p||^2}\{p_0^2 - ||p_v||^2\}, \qquad \sin\theta = (\pm)\frac{2||\underline{p}_v||}{||p||}p_0, \tag{7.7}$$

$$u \times \rho(p,u) = \pm\frac{1}{||p||}\sin\theta\, \underline{e} \tag{7.8}$$

où $\underline{e} = \frac{1}{||\underline{p}_v||}\underline{p}_v$.

Démonstration : Observons que étant donné $u_0 = 0$ on obtient à partir du théorème 7.1

$$\cos\theta = \frac{1}{||p||^2}\{p_0^2 - ||\underline{p}_v||^2\}, \qquad \sin\theta = (\pm)\frac{2||\underline{p}_v||}{||p||}p_0 .$$

En outre à partir du théorème 7.2 et en utilisant $||u|| = 1$ on obtient que :

$$u \times \rho(p,u) = \frac{2}{||p||^2}p_0\underline{p}_v = \frac{1}{||p||\,||p_v||}\sin\theta\,\underline{p}_v = (\pm)\frac{1}{||p||}\sin\theta\,\underline{e}.$$

Avec les résultats précédents nous pouvons maintenant montrer le résultat fondamental suivant :

Théorème 7.3 : Soit $\theta \in [0,n\pi]$, $n \in \Re$, $\underline{w} \in Q_v$, $||\underline{w}|| = 1$. Alors le quaternion $p = (p_0, p_1, p_2, p_3) \in Q$, avec $p_0 \in \Re - \{0\}$ et

$$\underline{p}_v = (\pm) \frac{||p||^2}{2p_0} \sin\theta \underline{w}, \tag{7.9}$$

est tel que $\rho(p,\underline{w}) = \underline{w}$. En outre $p_0 \in \Re - \{0\}$ satisfait l'équation

$$4p_0^4 - 4||p||\, p_0^2 \cos\theta - ||p||^4 \sin^2\theta = 0 \tag{7.10}$$

Démonstration : Nous savons d'après le théorème 3.1 que $\forall p \in Q$ on obtient $\rho(p,\underline{p}_v) = \underline{p}_v$. Dans ce cas à partir de la linéarité de $\rho(p,\bullet)$ nous obtenons

$$\rho(p,\underline{p}_v) = (\pm) \frac{||p||^2}{2p_0} \sin\theta\, \rho(p,\underline{w}) = \underline{p}_v = (\pm) \frac{||p||^2}{2p_0} \sin\theta \underline{w} .$$

Par suite, $\rho(p,\underline{w}) = \underline{w}$. En outre à partir du corollaire 7.1 nous obtenons

$$p_0^2 = ||p||^2 \cos\theta + ||\underline{p}_v||^2 = ||p||^2 \cos\theta + \frac{||p||^4}{4p_0^2} \sin^2\theta$$

et par suite,

$$4p_0^4 - 4p_0^2 ||p||^2 \cos\theta - ||p||^4 \sin^2\theta = 0 .$$

□

Dans le théorème précédent, nous observons que lorsque la partie réelle du quaternion est nulle la partie vectorielle de ce même quaternion reste indéterminée. Afin de déterminer ces singularités nous montrons le résultat suivant :

Théorème 7.4 : Les racines réelles de l'équation de degré quatre

$$4p_0^4 - 4p_0^2 ||p||^2 \cos\theta - ||p||^4 \sin^2\theta = 0 . \tag{7.11}$$

sont

$$p_{01} = ||p|| \cos\frac{\theta}{2}, \qquad p_{02} = - ||p|| \cos\frac{\theta}{2} \quad . \tag{7.12}$$

Démonstration : Soit $\omega = p_0^2$; alors l'équation de quatrième degré s'écrit sous la forme suivante :

$$4\omega^2 - 4\omega\, ||p||^2 \cos\theta - ||p||^4 \sin^2\theta = 0 \,.$$

Les solutions de cette équation sont :

$$\omega_1 = \frac{1}{2} ||p||^2 (\cos\theta + 1), \qquad \omega_2 = \frac{1}{2} ||p||^2 (\cos\theta - 1)\,.$$

Alors,

$$p_0 = (\pm)\, ||p|| \sqrt{\frac{1}{2}(\cos\theta + 1)} = (\pm)\, ||p|| \cos\frac{\theta}{2}\,.$$

□

Sur la base de ce résultat observons que des singularités se présentent lorsque $\cos\frac{\theta}{2} = 0$, c'est à dire $\theta \in \{\pm\, n\pi, 1, 3, \ldots\}$. Observons également qu'en combinant les deux théorèmes précédents nous obtenons

$$p_0 = (\pm)\, ||p|| \cos\frac{\theta}{2}, \qquad \underline{p}_v = (\pm) \frac{||p||}{2\cos\frac{\theta}{2}} \sin\theta \underline{w} = (\pm)\, ||p|| \sin\frac{\theta}{2}\, \underline{w}\,. \tag{7.13}$$

Cette représentation du quaternion $p \in Q$ associée à la rotation se trouve par exemple en [11]. Deux cas couramment utilisés sont le quaternion unitaire c'est à dire $p_0 = \pm \cos\frac{\theta}{2}$, $\underline{p}_v = \sin\frac{\theta}{2}\, \underline{w}$, dont les éléments sont appelés les paramètres d'Euler [1], [2], [11] et le quaternion de norme $||p|| = 1/(\cos \theta/2)$, c'est à dire $p_0 = \pm 1$, $\underline{p}_v = (\pm) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, \underline{w}$, dont les éléments sont appelés les paramètres de Euler-Rodrigues, [11]. Dans ces cas, en utilisant (3.6), nous obtenons les représentations

$$\rho(p,\bullet) = \underset{\sim}{I}_R + \left(2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right) \underset{\sim}{I}_0 + 2\left(1 - \cos^2\frac{\theta}{2}\right) \ \underline{w} \otimes \underline{w} \pm \cos\frac{\theta}{2} \ \sin\frac{\theta}{2} \underset{\sim}{W}_{\underline{w}} \qquad (7.14)$$

pour les paramètres d'Euler et ,

$$\rho(p,\bullet) = \underset{\sim}{I}_R + \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\,\frac{\theta}{2}} \left[\left(1 - \mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}\right) \underset{\sim}{I}_0 + 2\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2} \ \underline{w} \otimes \underline{w} \pm \ 2\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2} \underset{\sim}{W}_{\underline{w}}\right] \qquad (7.15)$$

pour les paramètres d'Euler-Rodrigues, où

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{W}_{\underline{w}} = & - w_3\, \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_2 + w_2\, \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_4 + w_3\, \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_2 - w_1\, \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_4 - \\ & - w_2\, \underset{\sim}{e}_4 \otimes \underset{\sim}{e}_2 + w_1\, \underset{\sim}{e}_4 \otimes \underset{\sim}{e}_3 \,. \end{aligned} \qquad (7.16)$$

Dans ces représentations, l'identification de la rotation $\hat{\underset{\sim}{F}} \in SO(3)$ est directe. D'autres représentations de ces rotations se trouvent en [1], [9] et [10]. Nous montrerons par la suite qu'il s'agit de cas particuliers de quaternions non-unitaires et par suite qu'ils peuvent être obtenus directement à partir des résultats présentés dans ce travail.

Corollaire 7.2 : La transformation $\rho(p,\bullet) \in L(Q,Q)$ peut s'exprimer sous la forme

$$\begin{aligned} \rho(p,\bullet) &= \underset{\sim}{I} + \frac{2}{\|p\|^2} \ \sin^2\frac{\theta}{2} \underset{\sim}{W}_p \circ \underset{\sim}{W}_p \pm \frac{1}{\|p\|} \cos\frac{\theta}{2} \ \sin\frac{\theta}{2} \underset{\sim}{W}_p \\ &= \underset{\sim}{I} + \frac{2}{\|p\|^2} \ \sin^2\frac{\theta}{2} \underset{\sim}{W}_p \circ \underset{\sim}{W}_p + \frac{1}{\|p\|} \ \sin\theta \, \underset{\sim}{W}_p \,, \end{aligned} \qquad (7.17)$$

où, $\underset{\sim}{W}_p = \|p\| \, \underset{\sim}{W}_{\underline{w}}$.

Démonstration : On obtient le résultat en rappelant que $\sin\theta = \pm \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2}$ et en utilisant la représentation donnée en (3.4).

□

Corollaire 7.3 : Une autre représentation paramétrique de $\rho(p,\bullet) \in L(Q,Q)$ est donnée par :

$$\rho(p,\bullet) = \underset{\sim}{I} + \frac{2}{\theta^2} \ \sin^2\frac{\theta}{2} \underset{\sim}{W}_p \circ \underset{\sim}{W}_p + \frac{1}{\theta} \ \sin\theta \, \underset{\sim}{W}_p \,, \qquad (7.18)$$

avec $\underset{\sim}{W}_p = \|p\| \, \underset{\sim}{W}_{\underline{w}}$.

Démonstration : En effet, il suffit de sélectionner le corollaire précédent $p \in Q$, tel que $||p|| = \theta$.

$\square$

Ce résultat est obtenu en utilisant des représentations géométriques dans [10]. Une autre représentation classique est la représentation exponentielle des rotations telles que la représentation appelée formule de Rodrigues qui est présentée par exemple dans [9] et [10].

Corollaire 7.4 : La transformation $\rho(p,\cdot) \in L(Q,Q)$ est telle que

$$\rho(p,\cdot) = e^{\underset{\sim}{W}_\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underset{\sim}{W}_\theta^n, \tag{7.19}$$

où, $\underset{\sim}{W}_\theta = \theta \underset{\sim}{W}_{\underline{w}}$.

Démonstration : En effet à partir du corollaire précédent et des développements

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n+1)!}, \qquad \left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(n+1)!}$$

on obtient le résultat cherché, c'est à dire :

$$\begin{aligned}\rho(p,\cdot) &= \underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{W}_\theta + \frac{1}{2!}\underset{\sim}{W}_\theta^2 - \frac{\theta^2}{3!}\underset{\sim}{W}_\theta - \frac{\theta^2}{4!}\underset{\sim}{W}_\theta^2 + \frac{\theta^4}{5!}\underset{\sim}{W}_\theta + \frac{\theta^4}{6!}\underset{\sim}{W}_\theta^2 \dots \\ &= \underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{W}_\theta + \frac{1}{2!}\underset{\sim}{W}_\theta^2 + \frac{1}{3!}\underset{\sim}{W}_\theta^3 + \frac{1}{4}\underset{\sim}{W}_\theta^4 + \dots + \frac{1}{n!}\underset{\sim}{W}_\theta^n + \dots\end{aligned}$$

On a utilisé ici le théorème (4.2).

$\square$

En négligeant dans la représentation exponentielle les termes $\underset{\sim}{W}_\theta^n$, $n \geq 2$, on obtient le tenseur

$$p_0 = \frac{2}{\cos^2\frac{\theta}{4}} \cos\frac{\theta}{2} = \left(\frac{2}{\cos^2\frac{\theta}{4}}\right) \cos\left(\frac{\theta}{4}+\frac{\theta}{4}\right) = \frac{2}{\cos^2\frac{\theta}{4}} \left\{\cos^2\frac{\theta}{4} - \sin^2\frac{\theta}{4}\right\} = 2\left(1 - \mathrm{tg}^2\frac{\theta}{4}\right),$$

$$\underline{p}_v = \frac{2}{\cos^2\frac{\theta}{4}} \sin\frac{\theta}{2}\, \underline{w} = \left(\frac{2}{\cos^2\frac{\theta}{4}}\right) \sin\left(\frac{\theta}{4}+\frac{\theta}{4}\right) \underline{w} = \left(\frac{4}{\cos^2\frac{\theta}{4}}\right) \sin\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{4}\, \underline{w} = 4\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{4}\, \underline{w}.$$

Observons maintenant que

$$p_0 = 2\left(1 - \mathrm{tg}^2\frac{\theta}{4}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{16}\|\underline{p}_v\|^2\right) = \frac{1}{8}\left(16 - \|\underline{p}_v\|^2\right),$$

c'est à dire $\|\underline{p}_v\|^2 = 16 - 8p_0 = 8(2 - p_0)$. Par suite $\|p\| = p_0 - 4$, et ainsi,

$$\|p\|^2 = p_0^2 + \|\underline{p}_v\|^2 = p_0^2 - 8p_0 + 16 = (p_0 - 4)^2.$$

On obtient le résultat en appliquant le théorème 4.5 avec $\ell = 2$.

□

En accord avec les résultats que nous avons présentés dans cette section, nous pouvons observer qu'avec les représentations paramétriques obtenues dans la section 3 de ce travail, on systématise les représentations des rotations de la mécanique des corps rigides et déformables habituellement présentées sous la forme trigonométrique. Observons finalement que n'importe quelle des représentations de la rotation en terme de fonctions trigonométriques peut être utilisée pour trouver la solution du problème :

étant donné $\theta \in [0, n\pi]$, $n \in \Re$, $\underline{w} \in \Re^3$, $\|\underline{w}\| = 1$ tel que $\rho(p,\underline{w}) = \underline{w}$, trouver

$$M_{\rho(p,\cdot)} \in M_{4\times 4} \tag{7.24}$$

Il s'agit là du problème associé à la cinématique directe des corps rigides.

8 - CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons présenté la structure algébrique de l'espace vectoriel des quaternions. Cela nous a permis de représenter sous forme paramétrique les rotations finies des milieux continus. Cependant l'étude du problème inverse associé à la cinématique des corps rigides présente des singularités. Dans le cas de la cinématique directe, la singularité se présente dans le cas $p_0 = 0$ c'est à dire lorsque l'angle de rotation $\theta \in \{\pm n\pi, n = 1,3,...\}$. Dans ce cas observons à partir de (5.9) qu'il existe une valeur caractéristique de multiplicité deux, et par suite nous pouvons affirmer que les singularités se présentent lorsque la transformation n'est pas diagonalisable. A partir de la représentation (3.4), nous observons qu'aux singularités la partie antisymétrique de la rotation est nulle et par suite que celle-ci peut être représentée par un tenseur symétrique. Quelques questions restent ouvertes :

a) Existe-t-il une représentation paramétrique pour laquelle il n'y aurait pas de singularités ?

b) Si une telle représentation existe; peut-on la déterminer à l'aide d'une structure algébrique $Q = (C^4, \oplus, *)$, où C est le corps des nombres complexes ?.

9 - BIBLIOGRAPHIE

[1] GERADIN,P.; PARK, K.C; CARDONA, A. : On the representation of Finite Rotations in Spatial Kinematics. Report N°VA-51. University of Liège, Belgium, pp 1-58.

[2] GERADIN,M; CARDONA, M. 1989 : Kinematics and Dynamics of Rigid and Flexible Mechanism Using Finite Elements and Quaternion Algebra, Computational Mechanics 4, pp 115-135.

[3] GERADIN, M; ROBERT, G.; BUCHET, P. 1986 : Kinematics and Dynamic Analysis of Mechanism. A Finite Element Approach Based on Euler Parameters, Bergan, P.(Ed), Finite Element Method for Nonlinear Problems. Berlin, Heidelberg, New-York, Springer, pp 41-60.

[4] WEHAGE, R.A 1984 : Quaternions and Euler Parameters. A Brief Exposition. Haug, E.J. (Ed.) Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, pp 147-180.

[5] NIKRAVESH, P.E. 1984 : Spatial Kinematics and Dynamic Analysis with Euler Parameters, Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics, Haug E.J. (Ed.), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp 261-281.

[6] VAN DEER VAN, K; JONKER, J.B 1984 : Dynamics of Flexible Mechanisms, Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics, Haug, E.J. (Ed.), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, pp 382-400.

[7] LE BORGNE M, 1987 : Quaternions et Contrôle sur l'Espace des Rotations, Rapport de Recherche INRIA-RENNES.

[8] CASTELJAU, P. 1987 : Les quaternions, Hermes, Paris-Londres-Lausanne.

[9] SIMO, J.C ; MARSDEN J.E; KRISHNAPRASAD, P.S. 1989. The Hamilton Structure of Nonlinear Elasticity ; The Material and Convective Representations of Solids, Rods and Plates. Archive for Rational Mech. and Anal.

[10] ARGYRIS, J. 1982 : An Excursion into Large Rotations-Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 32, pp 85-155.

[11] ROBERTSON, R.E; SCHWERTASSEK, R. 1988 : Dynamics of Multibody Systems, Springer-Verlag.

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

ISSN 0249-6399